

DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISFÜZET

# Gráfok optimális kövezési száma

Papp F. László

Témavezető: Dr. Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék  
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2022



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

## 1. Bevezetés

A  $G$  gráf csúcshalmazát  $V(G)$ -vel, az élhalmazát  $E(G)$ -vel jelöljük.

A gráf kövezés egy gráfokon játszható játék. Saks és Lagarias javasolta egy Erdős által megfogalmazott számelméleti probléma megoldási módjaként, melyet végül Chung alkalmazott először 1989-ben [12].

Egy  $G$  gráf  $P$  köelosztásán egy olyan függvényt értünk, amely a gráf minden egyes csúcsához egy nemnegatív egész számot rendel. A  $P(v)$  értékre úgy gondolunk, hogy a  $v$  csúcsra pontosan ennyi követ helyeztek. A  $P$  köelosztás méretén az összes kő mennyiségét értjük és ezt a mennyiséget  $|P|$ -vel jelöljük.

Egy kövezési lépés levesz két követ egy csúcsról és feltesz egy követ egy szomszédos csúcsra. A kövezési lépést akkor nevezzük *megengedettnek*, ha olyan csúcsról vesz le két követ, amin található legalább két kő. Kövezési lépések egy sorozata akkor *végrehajtható* egy  $P$  köelosztáson, ha minden egyes lépés megengedett azon elosztás alatt, amit a korábbi kövezési lépések végrehajtása után kaptunk.

Egy  $v$  csúcs  $k$ -*elérhető* a  $P$  köelosztás alatt, ha van olyan végrehajtható kövezési lépések sorozata, amit ha a  $P$  köelosztásra végrehajtunk, akkor végül a  $v$  csúcson legalább  $k$  darab kő található. Ha  $k = 1$ , akkor a  $v$  csúcsot egyszerűen  $P$  alatt elérhetőnek nevezzük.

A  $G$  gráfon vett  $P$  köelosztás megoldható, ha  $G$  minden egyes csúcsa elérhető  $P$  alatt. A  $G$  gráf egy köelosztását akkor nevezzük *optimálisnak*, ha megoldható és a mérete a lehet legkisebb a megoldható köelosztások között. A  $G$  gráf *optimális kövezési számán* egy optimális köelosztás méretét értjük és ezt a mennyiséget  $\pi_{\text{opt}}(G)$ -vel jelöljük.

Az optimális kövezési számot először Patcher és társszerzői említik [27] 1995-ben megjelent cikkükben. A kövezés elképzelhető úgy, mint egy nyersanyagszállítási probléma. Tekinthezünk úgy a kövekre mint üzemanyagcellákra, amelyeket egy hálózatban kell szállítani. A kövezési lépés során megtörténő kövesztésnek pedig megfelel az üzemanyagcella felhasználása. Optimális kövezés esetén az a kérdés, hogy mi az üzemanyagcellák optimális elhelyezése a gráf csúcsain úgy, hogy szükség esetén bármely kijelölt csúcsra tudunk üzemanyagcellát szállítani.

Jó pár gráfcsalád optimális kövezési száma ismert. Például pontosan tudjuk az optimális kövezési számát az útnak és körnek [9, 17, 27], a létragrafoknak [9], a hernyógrafoknak [15] és az  $m$  ágú teljes fának [16]. Ismerünk pár alsó és felső korlátot is az optimális kövezési számra. Az egyik első ilyen korlát szerint  $\pi_{\text{opt}}(G) \leq 2^{\text{diam}(G)}$  [26]. Bunde és társszerzői megvizsgálták, hogy milyen kapcsolat található az optimális kövezési szám és a gráf minimum fokszáma között. Megmutatták, hogy  $\pi_{\text{opt}}(G) \leq \frac{4n}{\delta+1}$  [9], ahol  $\delta$  a  $G$  gráf legkisebb fokszáma. Továbbá konstrukciót adtak végtelen sok olyan gráfra, melyeknek az optimális kövezési száma  $(2.4 - \frac{24}{5\delta+15} - o(\frac{1}{n})) \frac{n}{\delta+1}$  [9].

Amennyiben megadnak nekünk egy  $G$  gráfot, rajta egy  $P$  köelosztást és kijelölnek egy  $v$  célcsúcsát a  $G$ -nek, akkor annak eldöntése, hogy a  $v$  csúcs elérhető-e  $P$  alatt NP-teljes [24]. Annak eldöntése, hogy egy  $G$  gráf esetén  $\pi_{\text{opt}}(G) \leq k$  teljesül-e szintén NP-teljes [24].

Belford és Sieben kicsit módosították a kövezés definícióját. Az így kapott játékot murvázásnak nevezzük. Egy *szigorú murvázási lépés* egy-egy követ vesz le két különböző csúcsról és egy követ helyez ezen két csúcs közös szomszédjára. Egy szigorú murvázási lépés akkor megengedett, ha mind a két csúcson, ahonnan köveket vesz le, található kő. Egy murvázási lépés lehet kövezési lépés vagy szigorú murvázási lépés. Ha az optimális kövezési szám definíciójában mindenhol kicseréljük a kövezési lépést murvázási lépésre, akkor az *optimális murvázási szám* definícióját kapjuk. Ezt a mennyiséget  $\rho_{\text{opt}}(G)$ -vel jelöljük. Optimális murvázással kapcsolatban sokkal kevesebb cikk jelent meg, mint kövezéssel kapcsolatban. A szerzőnek négy cikkről van tudomása [3, 6, 8, 23].

Egy viszonylag friss variációja a kövezésnek az úgynevezett (kapacitás) korlátozott optimális kövezés. Egy köelosztást *t*-korlátozottnak hívunk, ha semelyik csúcs sem tartalmaz *t*-nél több követ. A *G* gráf *t*-korlátozott optimális kövezési száma a legkisebb *t*-korlátozott megoldható köelosztás mérete, melyet  $\pi_t^*(G)$ -vel jelölünk.

Ezt a gráfparamétert Chellali és társszerzői definiálták és cikkükben [11] bebizonyították, hogy  $\pi_2^*(P_n) = \lceil 2n/3 \rceil$ , ahol  $P_n$  az *n* csúcsú utat jelöli. Ezen túlmenően  $\pi_2^*(G)$ -re több felső korlátot is adtak. Shiue bebizonyította, hogy ha *T* egy *n* csúcsú fa, akkor  $\pi_2^*(T) = \lceil 2n/3 \rceil$  [29].

A *G* és *H* gráf Descartes szorzatán azt a  $G \square H$  gráfot értjük, melynek a csúcshalmaza  $V(G) \times V(H)$  és egy  $(g, h)$  csúcs pontosan akkor szomszédos a  $(g', h')$  csúcscsal, ha vagy  $g = g'$  és  $\{h, h'\} \in E(H)$ , vagy  $h = h'$  és  $\{g, g'\} \in E(G)$ . A  $G \square G \square \dots \square G$  Descartes szorzatot, ahol *G* pontosan *d*-szer szerepel,  $G^{\square d}$ -vel jelöljük.

## 2. Optimális kövezési és murvázási szám megadott átmérő esetén

Az *u* és *v* csúcsok távolságán az őket összekötő utak közül a legkevesebb élet tartalmazó élszámát értjük. A *G* gráf átmérőjén a benne található két legtávolabbi csúcs távolságát értjük és ezt a mennyiséget  $\text{diam}(G)$ -vel jelöljük.

Ha a *G* gráf egy csúcsára  $2^{\text{diam}(G)}$  követ helyezünk, akkor megoldható köelosztást kapunk. Emiatt  $\pi_{\text{opt}}(G) \leq 2^{\text{diam}(G)}$ , de általában az optimális köelosztás ennél sokkal kevesebb követ használ. Felvetődik a kérdés, hogy tetszőlegesen nagy átmérő esetén létezik-e olyan gráf, aminek az optimális kövezési száma  $2^{\text{diam}(G)}$ ?

Ezt a kérdést Muntz és társszerzői vizsgálták először [26]. Ők azt állították, hogy a válasz pozitív, ami igaz is. Viszont a bizonyításuk helytelen. Úgy próbálták ezen állítást igazolni, hogy adtak egy iteratív konstrukciót, amely szerintük  $2^{\text{diam}(G)}$  optimális kövezési számú gráfokat ad. Azt állították, hogy ha *G* egy *d* átmérőjű gráf, aminek az optimális kövezési száma  $2^d$ , akkor  $G \square K_{2^{d+1}}$  egy *d* + 1 átmérőjű gráf  $2^{d+1}$  optimális kövezési számmal. Az állítás első felével semmi gond nincs, könnyű látni, hogy  $\text{diam}(G \square K_{2^{d+1}}) = d + 1$ . Azonban az így kapott  $G \square K_{2^{d+1}}$  gráf optimális kövezési száma nem feltétlen  $2\pi_{\text{opt}}(G)$ , sőt az esetek többségében kevesebb.

Muntzék a  $K_3$  teljes gráfot választották konstrukciójuk kezdő gráfjaként.  $K_3 \square K_3 \square K_5$  a harmadik gráf amit a konstrukció adott. Muntzék állítása szerint ezen gráf optimális kövezési számának 8-nak kellene lennie, azonban mi megadtunk egy összesen 6 követ tartalmazó megoldható köelosztást ezen a gráfon, ezzel cáfolva Muntzék bizonyítását.

Herscovici és társszerzői bebizonyították, hogy  $\pi_{\text{opt}}(K_m^{\square d}) = 2^d$  ha  $m > 2^{d-1}$  [21]. Valójában ők ennél egy sokkal általánosabb eredményt igazoltak, de számunkra most elegendő ezt a gyengébb formát tekinteni. Az átmérője ezen gráfoknak *d*, tehát ezen eredmény helyes bizonyítást ad Muntzék állítására.

Megkérdelhetjük, hogy mi a helyzet ha murvázást tekintünk kövezés helyett? Sajnos Herscoviciék bizonyítása a kövezés jó pár olyan tulajdonságát kihasználja, ami murvázás esetén nem teljesül, emiatt az ő eredményüket nem használhatjuk. Mi megválaszoljuk ezen kérdést és bebizonyítjuk, hogy  $\rho_{\text{opt}}(K_m^{\square d}) = 2^d$  ha  $m \geq 2^d$ . Mivel  $\rho_{\text{opt}}(G) \leq \pi_{\text{opt}}(G)$ , ezért a kövezéses esetre is kapunk egy új rövid bizonyítást. Ezen állítás igazolásához először egy alsó korlátot adunk az optimális murvázási számra a *k* távolságú domináló szám segítségével.

A *G* gráf csúcshalmazának *S* részhalmazát *k* távolságú domináló halmaznak nevezzük, ha *G* bármely *v* csúcsához található *S*-nek egy olyan *s* eleme, hogy a *v* és *s* távolsága legfeljebb *k*. A *G* gráfban található legkisebb méretű *k* távolságú domináló halmaz méretét a *G* *k* távolságú domináló számának nevezzük és  $\gamma_k(G)$ -vel jelöljük.

**2.2. Tétel (Győri, Katona, Papp [3]).** Legyen  $G$  egy összefüggő gráf és  $k$  egy egynél nagyobb egész szám. Ekkor:  $\rho_{\text{opt}}(G) \geq \min(\gamma_{k-1}(G), 2^k)$ .

Szabadon megválaszthatjuk  $k$ -t. A legjobb alsó korlátot akkor kapjuk, ha  $\gamma_{k-1} \approx 2^k$ . Legyen  $\Sigma_{m,d}$  a következő gráf: Választunk egy  $m$  méretű  $\Sigma$  ábécét. A  $\Sigma_{m,d}$  gráf csúcsai az  $d$  hosszú  $\Sigma$  feletti szavak. Két csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő szavak pontosan egy betűben különböznek, azaz a Hamming-távolságuk egy. Közismert, hogy  $\Sigma_{m,d} \simeq K_m^{\square d}$ . Azért használjuk ezt a kódoláselméleti megközelítést, mert így sokkal könnyebb meghatározni  $K_m^{\square d}$  átmérőjét és a  $k$  távolságú domináló számát.

Könnyen látható, hogy  $\text{diam}(\Sigma_{m,d}) = d$ : A csupa  $a$ -ból álló szó mind a  $d$  karakterét meg kell változtatni, hogy a csupa  $b$ -ből álló szót kapjuk. Egy karakter megváltoztatása a  $\Sigma_{m,d}$  gráfban egy él menti áthaladásnak felel meg, tehát a csupa  $a$ -ból álló szó a csupa  $b$ -ből álló szótól  $d$  távol van. Legfeljebb  $d$  karakter megváltoztatásával pedig bármely  $d$  hosszú szóból bármely másik  $d$  hosszú szót előállíthatunk. Emiatt  $\text{diam}(\Sigma_{m,d}) = d$ .

Azon szavak, melyek külön-külön csak egyféle betűt tartalmaznak,  $d - 1$  távolságú domináló halmazzal alkotnak. Hiszen egy tetszőleges szónak a második, harmadik,  $\dots$   $d$ . karakterét az első karakterére változtatva csupa azonos betűt tartalmazó szót kapunk. Ilyen szóból  $m$  darab van. Ha csak  $m - 1$  szót választunk, akkor könnyen lehet olyan szót készíteni ami mindegyiktől  $d$  távol van. Emiatt  $\gamma_{k-1}(\Sigma_{m,d}) = m$ . Ezt felhasználva kapjuk a következőt:

**2.6. Tétel (Győri, Katona, Papp [3]).** A  $K_m^{\square d}$  gráf optimális kövezési és optimális murvázási száma is  $2^d$ , ha  $m \geq 2^d$ .

A kövezés tulajdonságait kihasználva javíthatunk a 2.2 tétel alsó becslésén. A legjobb becslés amit bizonyítottunk, a következő:

**2.9. Tétel (Győri, Katona, Papp [3]).** Minden  $k \geq 3$  és összefüggő legalább két csúcsú  $G$  gráf esetén:  $\pi_{\text{opt}}(G) \geq \min(2^k, \gamma_{k-1}(G) + 2^{k-2} + 1, \gamma_{k-2}(G) + 1)$ .

Ezt a tételt felhasználva igazoljuk, hogy a  $K_3 \square K_3 \square K_5$  gráf optimális kövezési száma pontosan 6.

### 3. Optimális kövezési szám megadott minimum fokszám esetén

Ebben a fejezetben az optimális kövezési szám és a minimum fokszám viszonyát tanulmányozzuk és megjavítunk Bunde és társszerzői néhány korábbi eredményét [9]. Jelölje  $\delta$  a  $G$  gráf legkisebb fokszámát. Megmutatjuk, hogy végtelen sok olyan kettő átmérőjű gráf létezik, amiknek az optimális kövezési száma tetszőlegesen közel van az ismert  $\frac{4n}{\delta+1}$  felső korláthoz. Pontosabban:

**3.3. Tétel (Czygrinow, Hurlbert, Katona, Papp [1]).** Minden  $\epsilon > 0$ -hoz létezik olyan kettő átmérőjű  $n$  csúcsú  $G$  gráf, amire  $\pi_{\text{opt}}(G) > \frac{(4-\epsilon)n}{\delta+1}$ .

Felvetődik a kérdés, hogy mi van ha az átmérő sokkal nagyobb kettőnél? A fejezet második felében egy olyan gráfcsaládot konstruálunk, amiben minden megadott minimum fokszámhoz van tetszőlegesen nagy átmérőjű olyan gráf, aminek az optimális kövezési száma viszonylag nagy. Ezen gráfok optimális kövezési számának meghatározásához a Bunde és társszerzői által kitalált összeomlási módszert [9] használjuk.

**3.14. Tétel (Czygrinow, Hurlbert, Katona, Papp [1]).** Minden  $\epsilon > 0$ -hoz és tetszőleges  $d$  egészhez, van olyan  $G$  gráf, hogy  $G$  átmérője legalább  $d$  és  $\pi_{\text{opt}}(G) \geq (\frac{8}{3} - \epsilon) \frac{n}{\delta+1}$ , ahol  $n$  a  $G$  csúcsszámát jelöli.

Legalább 3 átmérőjű gráfok esetén megjavítjuk az optimális kövezési számra vonatkozó korábbi felső becslést.

**3.15. Tétel (Czygrinow, Hurlbert, Katona, Papp [1]).** Legyen  $G$  legalább 3 átmérőjű összefüggő gráf, aminek a minimum fokszáma  $\delta$ . Ekkor  $\pi_{\text{opt}}(G) \leq \frac{15n}{4(\delta+1)}$ .

Ezt a tételt azzal bizonyítjuk be, hogy megmutatjuk, hogy létezik olyan megoldható köelosztás ami nem tartalmaz túl sok követ. Ehhez szükségünk van az alábbi definícióra:

**3.17. Definíció.** A  $v \in V(G)$  csúcs erősen elérhető a  $D$  köelosztás alatt, ha  $v$  és az összes szomszédja is elérhetőek  $D$  alatt.

Megadunk egy algoritmust, ami egy olyan  $D_0$  kezdeti köelosztást készít aminek a mérete legfeljebb  $4(\delta + 1)/15$ -ször annyi mint az alóla erősen elérhető csúcsok száma. Ezután megmutatjuk, hogy a  $D_0$  köelosztás kövek további hozzáadásával megoldható köelosztássá bővíthető úgy, hogy ez az arány nem megy  $4(\delta + 1)/15$  fölé. Mivel egy megoldható köelosztás alatt minden csúcs erősen elérhető, ezért ebből már következik a tétel állítása.

A 3.15 tétel segítségével megmutatjuk az alábbi:

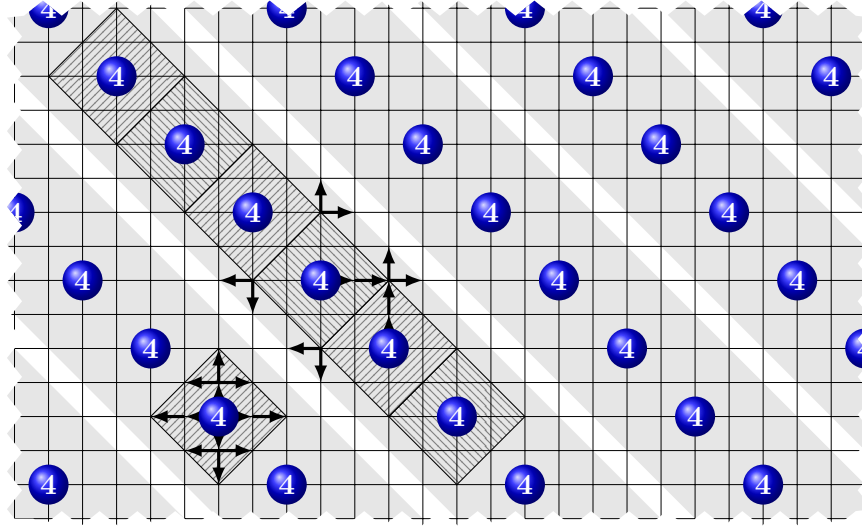
**3.31. Állítás (Czygrinow, Hurlbert, Katona, Papp [1]).** Nem létezik olyan összefüggő  $G$  gráf, amire  $\pi_{\text{opt}}(G) = \frac{4n}{\delta+1}$ .

Bunde és társszerzői kérdezték, hogy „Milyen nagy lehet  $\pi_{\text{opt}}(G)$ , ha a minimum fok  $\delta$  adott?”. Ezen kérdésre tudunk válaszolni, ha kombináljuk az előző állítás és a 3.3 tétel eredményeit:

**3.32. Következmény (Czygrinow, Hurlbert, Katona, Papp [1]).** Bármely  $\delta$  minimum fokszámú összefüggő  $G$  gráf esetén  $\pi_{\text{opt}}(G) < \frac{4n}{\delta+1}$  és ez a korlát éles.

## 4. Lépcső gráfok

Az  $n$ -szer  $m$ -es négyzetrács gráfot  $SG_{n,m}$ -el jelöljük. Ez a gráf izomorf  $P_n \square P_m$ -mel. A négyzetrács gráfok optimális kövezési számát többen is vizsgálták már. A  $P_n \square P_2$  [9] és  $P_n \square P_3$  [33] gráfok esetén ismerjük a konkrét értékét az optimális kövezési számnak. A szélesebb négyzetrács gráfok esetén a kérdés továbbra is nyitott. Konstruáltunk egy megoldható köelosztását a négyzetrács gráfnak [2]. Ez a köelosztás látható az 1. ábrán. Ez alapján az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg:



1. ábra. A négyzetrács gráf egy megoldható kőelosztása.

**4.1. Tétel (Győri, Katona, Papp [2]).**  $\pi_{\text{opt}}(SG_{n,m}) \leq \frac{2}{7}nm + O(n+m) \approx 0.2857nm + O(n+m)$

Ha a készített  $P$  kőelosztásnak egy olyan átlóját tekintjük, amire köveket helyeztünk, akkor ezen átlón található kövek segítségével egy 7 átlóból álló sáv csúcsai érhetőek el (lásd 1. ábra). Lényegében a négyzetrács gráfot felosztottuk ilyen 7 széles sávokra és ezekre helyeztünk megoldható kőelosztásokat.

Azt sejtjük, hogy  $P$  egy optimális kőelosztása a négyzetrács gráfnak, viszont ezt sajnos nem tudjuk bebizonyítani. Adódik a kérdés, hogy legalább a 7 széles átlós sávokon belül így megadott kőelosztás optimális-e? Ha nem, akkor ez cáfolná azon sejtésünket, hogy  $P$  optimális kőelosztás. Ez a kérdés a fő motivációja ennek a fejezetnek.

Az általunk vizsgált gráfokat *lépcső gráfoknak* nevezzük. Ezek összefüggő feszített részgráfjai a négyzetrács gráfnak. A hét széles lépcső gráfok megfelelnek a korábban említett hét széles átlós sávoknak.

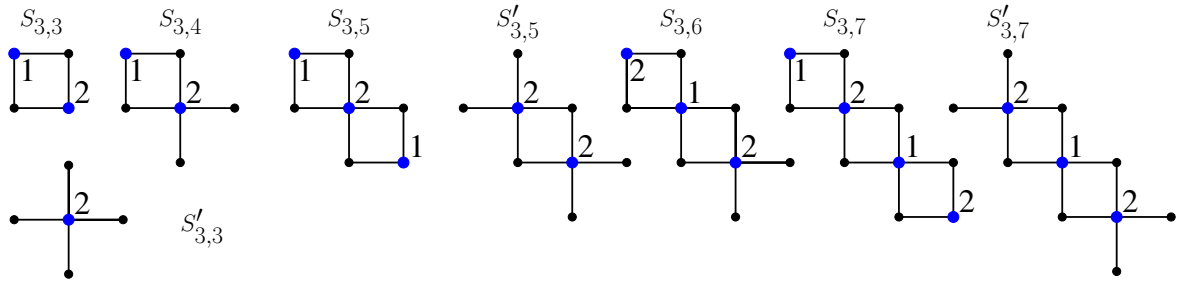
Jelölje  $SG = P_{\infty} \square P_{\infty}$  a végtelen négyzetrács gráfot, ahol  $P_{\infty}$  a duplán végtelen út aminek a csúcshalmaza  $\mathbb{Z}$ , az élhalmaza pedig  $\{\{i, i+1\} : i \in \mathbb{Z}\}$ .

**4.2. Definíció.** Tetszőleges  $k \in \mathbb{Z}$  esetén a  $D_k^+ = \{\{i, j\} \in V(SG) : i - j = k\}$  halmazt az  $SG$  pozitív átlójának nevezzük. Hasonlóan definiáljuk az  $SG$  negatív átlóját:  $D_k^- = \{\{i, j\} \in V(SG) : i + j = k\}$ .

A lépcső gráfokat szomszédos pozitív és szomszédos negatív átlók metszete által feszített részgráfként definiáljuk. Amennyiben a kiválasztott pozitív és negatív átlók száma is páratlan, akkor két különböző nem izomorf gráfot is kaphatunk. Néhány példa látható a 2. ábrán.

**4.3. Definíció.** Ha  $m$  páratlan, akkor legyen  $S'_{m,n}$  az  $SG$  azon részgráfja, amit a  $(\cup_{j=1}^m D_j^-) \cap (\cup_{i=1}^n D_i^+)$  csúcsok feszítenek és hasonlóan legyen  $S_{m,n}$  az  $SG$  azon részgráfja, amit a  $(\cup_{j=1}^m D_j^-) \cap (\cup_{i=0}^{n-1} D_i^+)$  csúcsok feszítenek.

Ha  $m$  páros, akkor legyen  $S_{m,n}$  az  $SG$  gráf  $(\cup_{j=1}^m D_j^-) \cap (\cup_{i=1}^n D_i^+)$  csúcsok által feszített részgráfja.



2. ábra. Néhány  $S_{3,n}$  és  $S'_{3,n}$  gráf optimális kőelosztása.

Megjegyezzük, hogy  $S'_{m,n} \cong S_{m,n}$ , ha  $n$  páros. Az első paraméterre szélességként, a másodikra pedig hosszúságként hivatkozunk. Ennek megfelelően feltesszük, hogy  $n \geq m$ . Az  $S_{m,n}$  és  $S'_{m,n}$  gráfokat pedig  $m$ -széles lépcső gráfoknak hívjuk.

Az 1-széles lépcső gráfok üres gráfok, emiatt az optimális kövezési számuk megegyezik a csúcshatárral. A 2-széles lépcső gráfok valójában utak, emiatt  $\pi_{\text{opt}}(S_{2,n}) = \pi_{\text{opt}}(S'_{2,n}) = \pi_{\text{opt}}(P_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ .

A korábban említett összeomlási módszert [9] használjuk ismét a most következő eredmények bizonyítása során.

**4.4. Tétel (Győri, Katona, Papp, Tompkins [5]).** *Ha  $4k+r \geq 2$ , ahol  $k \in \mathbb{Z}$  és  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ , akkor*

$$\pi_{\text{opt}}(S_{3,4k+r}) = 3k + r,$$

$$\pi_{\text{opt}}(S'_{3,4k+r}) = \begin{cases} 3k + 2 & \text{ha } r = 3 \\ 3k + r & \text{különbén.} \end{cases}$$

**4.9. Tétel (Győri, Katona, Papp, Tompkins [5]).**  $\pi_{\text{opt}}(S_{4,4k+r}) = 3k + r$ , kivéve amikor  $n \in \{1, 2\}$ .  
 $\pi_{\text{opt}}(S_{4,1}) = 2, \pi_{\text{opt}}(S_{4,2}) = 3$ .

**4.10. Tétel (Győri, Katona, Papp, Tompkins [5]).**  $\pi_{\text{opt}}(S_{5,5k+r}) = \pi_{\text{opt}}(S'_{5,5k+r}) = 4k + r$ ,  
kivéve amikor  $n \in \{1, 2, 3, 7\}$ .  $\pi_{\text{opt}}(S_{5,3}) = \pi_{\text{opt}}(S'_{5,3}) = 4$  és  $\pi_{\text{opt}}(S'_{5,7}) = 7$ .

**4.13. Tétel (Győri, Katona, Papp, Tompkins [5]).**  $\pi_{\text{opt}}(S_{6,n}) = n$ , kivéve amikor  $n \in \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$ .  
 $\pi_{\text{opt}}(S_{6,3}) = \pi_{\text{opt}}(S_{6,4}) = 5, \pi_{\text{opt}}(S_{6,8}) = 9$  és  $\pi_{\text{opt}}(S_{6,9}) = 10$ .

**4.16. Tétel (Győri, Katona, Papp, Tompkins [5]).** *Legyen  $S_{7,n}^*$  az  $S_{7,n}$  vagy az  $S'_{7,n}$  gráf, ekkor*

$$n + 1 \leq \pi_{\text{opt}}(S_{7,n}^*) \leq n + 3.$$

*Az alsó korlát éles az  $S_{7,5}, S_{7,6}, S_{7,7}, S_{7,8}$  gráfokra és minden olyan  $S'_{7,n}$  gráf esetén amikor  $n \equiv 3 \pmod{4}$ .*

Sajnos nem tudtuk meghatározni a  $\pi_{\text{opt}}(S_{7,n}^*)$  pontos értékét. Az összeomlási módszerrel nem tudjuk azt bizonyítani, hogy legalább  $n + 2$  kőre van szükség, viszont néhány  $S_{7,n}^*$  gráfhoz nem találtunk  $n + 1$  követ használó megoldható kőelosztást.

Természetes kérdés, hogy mennyi az optimális kövezési száma a 8-széles lépcső gráfoknak? A korábbi eredményeink megadják  $S_{8,n}$  értékét  $n \leq 7$  esetén. Ezek alapján úgy gondoljuk, hogy a 8 széles eset máshogy viselkedik mint a 7-széles. Számítógép és IP solver segítségével megtudtuk, hogy  $\pi_{\text{opt}}(S_{8,8}) = 11$ . Sajnos az  $n = 9$  eset már több számítási kapacitást igényelne mint amivel egy PC rendelkezik, ezért  $\pi_{\text{opt}}(S_{8,9})$  értékét nem ismerjük.  $S_{8,n}$ -re készítettünk olyan megoldható kőelosztásokat, amik nagyjából  $5n/4$  követ használnak. Ez alapján azt sejtjük, hogy  $\pi_{\text{opt}}(S_{8,n}) = \frac{5}{4}n + O(1)$ .

## 5. Alsó korlát a négyzetrács gárf optimális kövezési számára

Ahelyett, hogy a síkon tekintjük a négyzetrácsot, tekinthetjük a tóruszon is. Jelölje  $T_{m,n}$  az  $m$ -szer  $n$ -es tóruszrács gráfot, ami izomorf  $C_m \square C_n$ -nel. A négyzetrács gráf ebből éltörlekkel megkapható, emiatt bármilyen alsó korlát a tóruszrács gráf optimális kövezési számára egyből alsó korlátot ad a négyzetrács gráfra is. Jól ismert tény, hogy a tóruszrács gráf *csúcstranzitív*, azaz  $T_{m,n}$  bármely  $v_1$  és  $v_2$  csúcsa esetén létezik olyan  $f : V(G) \rightarrow V(G)$  gráfautomorfizmus, amelyre  $f(v_1) = v_2$ .

Ebben a fejezetben egy olyan új módszert mutatunk be aminek segítségével csúcstranzitív gráfok optimális kövezési számára lehet alsó korlátot adni. A módszer eléggé komplikált, sok definíciót igényel. A módszer felhasználja a Yerger és Xue által többletnek nevezett fogalmat [33], azonban azt többféleképpen is továbbfejleszti. A többlet eredeti definíciója:

**5.1. Definíció.** Jelölje  $\text{Reach}(P, v)$  a legnagyobb olyan  $k$  egészet, hogy a  $v$  csúcs  $k$ -elérhető  $P$  kőelosztás alatt. Egy  $v$  csúcs többlete a  $P$  kőelosztás alatt a  $\text{Reach}(P, v) - 1$  érték, ha  $v$  elérhető  $P$  alatt és 0 különben. Ezt a mennyiséget  $\text{Exc}(P, v)$ -vel jelöljük. A  $P$  kőelosztás alatti összes többleten a  $TE(P) = \sum_{v \in V(G)} \text{Exc}(P, v)$  mennyiséget értjük.

Egy  $v$  csúcs  $k$  távolságú nyílt környezete azon csúcsokat tartalmazza, amelyek távolsága  $v$ -től pontosan  $k$ . Ezen csúcsok halmazát  $N^k(v)$ -vel jelöljük.

**5.2. Definíció.** Egy  $v$  csúcsra helyezett kő hatása a következő érték:  $\text{ef}(v) = \sum_{i=0}^{\text{diam}(G)} \left(\frac{1}{2}\right)^i |N^i(v)|$ .

Ha a gráf csúcstranzitív, akkor  $\text{ef}(v)$  minden  $v$  csúcs esetén azonos. Herscovici és társszerzői megmutatták, hogy ha  $G$  egy csúcstranzitív gráf, akkor  $|V(G)|/\text{ef}(v)$ -nél nem lehet kisebb az optimális kövezési szám [20]. Ezt az eredményt az alábbira javítottuk:

**5.3. Tétel (Győri, Katona, Papp [4]).** Ha  $P$  egy megoldható kőelosztás a  $G$  gráfon, akkor

$$\sum_{v \in V(G)} \text{ef}(v)P(v) \geq |V(G)| + TE(P).$$

Könnyen látható, hogy egy optimális elosztás esetén általában nagyon sok csúcs 2, 3 vagy még több elérhető. Emiatt viszonylag sok az összes többlet. A minden csúcsra pontosan egy követ helyezőkőelosztás megoldható, azonban az összes többlete 0. Emiatt a többlet fogalmán kívül más objektumokra is szükségünk van ha javítani szeretnénk, az alsó becslésünket. Ezen objektumok definiálását a téziszfűzetben mellőzzük, csak a 5.45. tétel kimondásához nélkülözhetetlen fogalmakat vezetjük most be.



**5.6. Definíció.** A  $P$  kőelosztás lefedettségén azon csúcsok halmazát értjük akik elérhetőek  $P$  alatt. Ezen halmaz méretét  $\text{Cov}(P)$ -vel jelöljük.

**5.9. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $U$  kőelosztás kőhalom, ha  $U$  csak egy csúcshoz rendel köveket.

Kőhalmokból bármely kőelosztás felépíthető, például az alábbi módon: A  $P$  kőelosztás felírható úgy mint  $\sum_{u|P(u)>0} P_u$ , ahol  $P_u$  egy olyan kőhalom ami  $P(u)$  követ tartalmaz az  $u$  csúcson. Ekkor a  $\{P_u|P(u) > 0\}$  halmazt a  $P$  diszjunkt kőhalmokra bontásának nevezzük. A kőhalmoknak az az előnyük, hogy a többletük és a lefedettségük könnyen számolható.

**5.10. Állítás (Győri, Katona, Papp [4]).** Legyen  $U$  egy kőhalom, ami csakis az  $u$  csúcsra helyez köveket. Ekkor:

$$\text{Cov}(U) = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2(U(u)) \rfloor} |N^i(u)|,$$

$$\text{TE}(U) = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2(U(u)) \rfloor} |N^i(u)| \left( \left\lfloor \frac{U(u)}{2^i} \right\rfloor - 1 \right).$$

Most már kimondhatjuk azt a formulát, aminek segítségével alsó korlátot adhatunk bármely csúcstranzitív gráf optimális kövezési számára:

**5.45. Következmény (Győri, Katona, Papp [4]).** Ha  $P$  egy megoldható kőelosztása a csúcstranzitív  $G$  gráfnaks,  $v$  a  $G$  egy csúcsa,  $\Delta$  a  $v$  fokszáma és  $\{U_1, U_2, \dots, U_t\}$  a  $P$  diszjunkt kőhalmokra bontása, akkor

$$|P| \geq \frac{\frac{\Delta-1}{\Delta-2}|V(G)| + \sum_{i=1}^t \text{TE}(U_i) - \frac{1}{\Delta-2} \sum_{i=1}^t \text{Cov}(U_i)}{\text{ef}(v)}.$$

Könnyen kiszámítható, hogy a  $T_{m,n}$  tóruszrács gráf esetén  $\text{ef}(v) < 9$ . Miután levezetünk pár alsó korlátot  $\text{TE}(U_i)$ -re és néhány felső korlátot  $\text{Cov}(U_i)$ -re, az előző formulába helyettesítve kapjuk a következő tételt:

**5.49. Tétel (Győri, Katona, Papp [4]).** A  $T_{m,n}$  gráf optimális kövezési száma legalább  $\frac{2}{13}nm$ , ahol  $m, n \geq 5$ .

Az  $SG_{m,n}$  négyzetrács gráfot megkaphatjuk  $T_{m,n}$ -ből éltöreléssel, emiatt  $\pi_{\text{opt}}(SG_{m,n}) \geq T_{m,n}$ .

**5.50. Következmény (Győri, Katona, Papp [4]).** Az  $SG_{n,m}$  négyzetrács gráf optimális kövezési száma legalább  $\frac{2}{13}nm$ , ha  $n, m \geq 5$ .

Az 5.45. tétel melléktermékekén egy új bizonyítást kapunk a jól ismert  $\pi_{\text{opt}}(P_n) = \pi_{\text{opt}}(C_n) = \lceil 2n/3 \rceil$  tételre.

## 6. Korlátozott optimális kövezés

Könnyen látható, hogy  $\pi_2^*(G) \geq \pi_t^*(G) \geq \pi_{t+1}^*(G) \geq \pi_{\text{opt}}(G)$ . Érdekes kérdés, hogy melyek azok a gráfok, amelyeknek a 2-korlátozott optimális kövezési száma megegyezik az optimális kövezési számával. Az első témába vágó eredményünkhöz szükségünk van a lexikografikus gráfszoratra.

**6.2. Definíció.**  $G \cdot H$  jelöli a  $G$  és  $H$  gráfok lexikografikus szorzatát, mely jól ismert és a következőképpen van definiálva:  $V(G \cdot H) = V(G) \times V(H)$  és a  $(g_1, h_1)$  és  $(g_2, h_2)$  csúcsok akkor és csak akkor szomszédosak, ha vagy  $\{g_1, g_2\} \in E(G)$  vagy  $g_1 = g_2$  és  $\{h_1, h_2\} \in E(H)$ .

**6.4. Tétel (Papp [7]).** Ha  $G$  egy összefüggő  $n$  csúcsú gráf,  $m \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$  és  $t \geq 2$ , akkor

$$\pi_{\text{opt}}(G) = \pi_{\text{opt}}(G \cdot K_m) = \pi_t^*(G \cdot K_m).$$

Ezen tételt felhasználva megmutatjuk, hogy a  $t$ -korlátozott optimális kövezési szám kiszámítása algoritmikusan viszonylag nehéz feladat. Tekintsük az alábbi két eldöntési problémát:

### OPN:

*Bemenet:* egy  $G$  gráf és egy  $k$  egész szám:

*Kérdés:* teljesül, hogy  $\pi_{\text{opt}}(G) \leq k$ ?

### ROPN:

*Bemenet:* egy  $G$  gráf és két egész szám:  $t \geq 2$  és  $k$ :

*Kérdés:* teljesül, hogy  $\pi_t^*(G) \leq k$ ?

Milans és Clark bebizonyították, hogy az OPN eldöntési probléma NP-teljes [24]. Az előbbi tétel segítségével könnyedén megadhatunk egy OPN  $\rightarrow$  ROPN Karp-redukciót. A ROPN eldöntési probléma NP-ben van, mivel tanúnak lényegében jó lesz pontosan ugyan az, ami az OPN esetén. Ennek következtében:

**6.6. Tétel (Papp [7]).** A ROPN eldöntési probléma NP-teljes.

Chellali és társszerzői megkérdezték, hogy mitől függ az, hogy egy gráfnak a 2-korlátozott és a sima optimális kövezési száma megegyezik. Úgy gondoljuk hogy a válasz bonyolult. Nagyon sok ilyen gráf van, például az utak, körök, illetve a 6.4. tétel alapján bármely gráfból készíthetünk ilyen lexikografikus szorzattal. Megvizsgáljuk ezen tulajdonságnak és a gráf minimum fokszámának a viszonyát.  $\pi_{\text{opt}}(G) = \pi_2^*(G)$ -re az alábbi elégséges feltételt adjuk:

**6.9. Állítás (Papp [7]).** Legyen  $G$  egy  $n$  csúcsú gráf  $\delta$  minimum fokszámmal. Ha  $\delta(G) \geq \frac{2}{3}n - 1$ , akkor  $\pi_2^*(G) = \pi_{\text{opt}}(G)$ .

Azt is megmutatjuk, hogy ha a legkisebb fokszám kevesebb mint  $n/2 - 2$ , akkor végtelen sok olyan gráf van aminek ez a két gráfparamétere különbözik.

## Publikációs lista

- [1] A. CZYGRINOW, G. HURLBERT, GY. Y. KATONA, L. F. PAPP, Optimal pebbling number of graphs with given minimum degree *Discrete Applied Mathematics*, **260** (2019) pp. 117–130.
- [2] E. GYŐRI, G. Y. KATONA, L. F. PAPP, Constructions for the optimal pebbling of grids, *Periodica Polytechnica Electrical Engineering and Computer Science* **61 no. 2** (2017) pp. 217–223.
- [3] E. GYŐRI, GY. Y. KATONA, L. F. PAPP, Optimal pebbling and rubbing of graphs with given diameter *Discrete Applied Mathematics*, **266** (2019) pp. 340–345.
- [4] E. GYŐRI, G. Y. KATONA, L. F. PAPP, Optimal Pebbling Number of the Square Grid *Graphs and Combinatorics* **36** (2020) pp. 803–829.
- [5] E. GYŐRI, G. Y. KATONA, L. F. PAPP, C. TOMPKINS, Optimal Pebbling Number of Staircase Graphs, *Discrete Mathematics* **342** (2019) pp. 2148–2157.
- [6] G. Y. KATONA, L. F. PAPP, The optimal rubbing number of ladders, prisms and Möbius-ladders, *Discrete Applied Mathematics* **209** (2016) pp. 227–246.
- [7] L. F. PAPP, Restricted optimal pebbling is NP-hard, *Proceedings of the 11th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications* (2019)

## Hivatkozások

- [8] C. BELFORD, N. SIEBEN, Rubbling and optimal rubbing of graphs, *Discrete Mathematics* **309** (2009) pp. 3436–3446.
- [9] D.P. BUNDE, E. W. CHAMBERS, D. CRANSTON, K. MILANS, D. B. WEST, Pebbling and optimal pebbling in graphs *J. Graph Theory* **57 no. 3.** (2008) pp. 215–238.
- [10] C. CHANG, C. SHIUE, An investigation of the game of Defend the Island *ICGA Journal* **40 no. 4.** (2018) pp. 330–340.
- [11] M. CHELLALI, T. W. HAYNES, S. T. HEDETNIEMI, T. M. LEWIS, Restricted optimal pebbling and domination in graphs *Discrete Applied Math.* **221** (2017) pp. 46–53.
- [12] F. CHUNG, Pebbling in hypercubes, *SIAM J. Discrete Math.* **2** (1989) pp. 467–472.
- [13] S. ELLEDGE, G HURLBERT, An Application of Graph Pebbling to Zero-Sum Sequences in Abelian Groups, *Integers* **5(1)** (2005), A17.
- [14] B. CRULL, T. CUNDIFF, P. FELTMAN, G. H. HURLBERT, L. PUDWELL, Z. SZANISZLO, Z. TUZA, The cover pebbling number of graphs, *Discrete Math.* **296** (2005) pp. 15–23.
- [15] H. FU, C. SHIUE, The optimal pebbling number of the caterpillar, *Taiwanese Journal of Mathematics* **13 no. 2A** (2009) pp. 419–429.
- [16] H. FU, C. SHIUE, The optimal pebbling number of the complete m-ary tree, *Discrete Mathematics* **222 no. 1–3** (2000) pp. 89–100.

- [17] T. FRIEDMAN, C. WYELS, Optimal pebbling of paths and cycles, *arXiv:math/0506076 [math.CO]*
- [18] J. GROSS, J. YELLEN, P. ZHANG, EDS., Handbook of Graph Theory (Discrete Mathematics and Its Applications) 2nd Edition CRC Press, Boca Raton, (2014).
- [19] T. W. HAYNES, R. KEATON, Cover rubbing and stacking, *Discrete Mathematics* **343 no. 11** (2020) 112080
- [20] D. S. HERSCOVICI, B. D. HESTER, G. H. HURLBERT, Diameter bounds, fractional pebbling, and pebbling with arbitrary target distributions *manuscript*
- [21] D. S. HERSCOVICI, B. D. HESTER, G. H. HURLBERT, Optimal pebbling in product of graphs *Australasian J. of Combinatorics* **50** (2011) pp. 3–24.
- [22] Glenn Hurlbert's pebbling page <http://www.people.vcu.edu/~ghurlbert/pebbling/pebb.html>
- [23] G. Y. KATONA, N. SIEBEN, Bounds on the Rubbling and Optimal Rubbling Numbers of Graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **38** (2011) pp. 487–492.
- [24] K. MILANS, B. CLARK, The complexity of graph pebbling, *SIAM J. Discrete Mathematics* **20 no. 3** (2006) pp. 769–798.
- [25] D. MOEWS, Pebbling graphs, *J. Combin. Theory (B)* **55** (1992) pp. 244–252.
- [26] J. MUNTZ, S. NARAYAN, N. STREIB, K. VAN OCHTEN, Optimal pebbling of graphs, *Discrete Mathematics* **307** (2007) pp. 2315–2321.
- [27] L. PACTER, H.S. SNEVILY, B. VOXMAN, On pebbling graphs, *Congressus Numerantium* **107** (1995) pp. 65–80.
- [28] J. PETR, J. PORTIER, SZ. STOLARCZYK, A new lower bound on the pebbling number of the grid *arXiv:2111.13173* (2021)
- [29] C. SHIUE, Capacity restricted optimal pebbling in graph *Discrete Applied Mathematics* **260** (2019) pp. 284–288.
- [30] C. SHIUE, Distance restricted optimal pebbling in cycles *Discrete Applied Mathematics* **279** (2020) pp. 125–133.
- [31] C. SHIUE, Distance restricted optimal pebbling in paths *Discrete Applied Mathematics* **297** (2021) pp. 46–54.
- [32] J. SJÖSTRAND, The cover pebbling theorem, *The Electronic J. of Combinatorics* **12** (2005)
- [33] C. XUE, C. YERGER, Optimal Pebbling on Grids, *Graphs and Combinatorics* **32 no. 3** (2016) pp. 1229–1247.